Павлодар педагогикалық университетінің
ғылыми, ақпараттық-талдамалы журналы
Научный информационно-аналитический журнал
Павлодарского педагогического университета

2004 жылдан шығады
Основан в 2004 году

ҚАЗАҚСТАН ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ХАБАРШЫСЫ

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК КАЗАХСТАНА

2'2022

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК КАЗАХСТАНА
СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на учет средства массовой информации
№9076-Ж
выдано Министерством культуры, информации и спорта Республики Казахстан
25.05 2008 года

Тематическая направленность журнала «Педагогический вестник Казахстана»:
педагогические, гуманитарные, социальные науки, образование.
Периодичность: 4 номера в год. Язык публикуемых статей: казахский, русский, английский.

МАЗМҰНЫ **СОДЕРЖАНИЕ**

УДК 372.851
МРНТИ 14.25.09
DOI 10.52301/1991-0614-2022-2-53-66

***О.А. Тыщенко**[1]

[1] Алтайский государственный педагогический университет, Россия
ttoksana@yandex.ru

ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УТВЕРЖДЕНИЙ И СПОСОБОВ ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Аннотация. *В статье обсуждаются особенности содержания понятия «доказательство» в различных разделах математики и в языке преподавания математики. Делается вывод, что «доказательством» в обучении математике и в разделах математики, не относящихся к её основаниям, считаются убедительные рассуждения, проведённые на принятом уровне строгости. Рассмотрены нетипичные для математики, но распространённые при обучении математике способы обоснования и проверки утверждений, такие как эксперимент, модельное доказательство. Обсуждается роль и место этих способов рассуждений. Уточняется понятие «математического эксперимента», обсуждается его связь с понятием неполной индукции, а также роль и место индуктивных рассуждений в математике и в обучении математике. Ставится цель – показать методическую целесообразность различных видов деятельности школьников при изучении утверждений, в том числе видов деятельности, которые нехарактерны для построения математики, как дедуктивной теории. Кроме того, рассматриваются условия применимости рассуждений не в общем виде при изучении всеобщих математических предложений.*

Проблема: как сформировать к концу обучения в школе адекватное представление учащихся о математике как о дедуктивной теории, при этом не исключая экспериментальную деятельность школьников на математическом содержании, деятельность, соответствующую возрастным особенностям, способствующую развитию ценных личностных качеств.

Ключевые слова: *утверждение, теорема, «доказательство» в математике; «доказательство» в обучении математике; индуктивные рассуждения; эксперимент в математике; модельное доказательство.*

Введение

В самом математическом содержании, в свойствах математического знания, в его структуре заложена возможность формирования умения обосновывать, аргументировать, опровергать. Это определяют принципы построения математики, как аксиоматической теории и жесткие требования к достоверности математических утверждений – либо они доказаны на основе аксиом рассматриваемой системы, либо в этой системе они ложны. Правила вывода также регламентируются.

При изучении теорем и их доказательств в курсе школьной математики создаются условия для приобретения учащимися опыта дедуктивных рассуждений и менее формальных правдоподобных рассуждений, а также для формирования соответствующих умений.

Вместе с тем в процессе изучения математики, в частности при изучении теорем, появляется возможность для развития математической интуиции и творческих способностей. Эти цели не менее важны для формирования логического мышления, но предполагают определённую свободу в выборе методов обоснования. Использование при изучении теорем рассуждений различной степени строгости и правдоподобности способствует формированию критического мышления в большей степени, чем «непонятное», но «строгое» доказательство. Однако есть непременное условие – регулярное обсуждение с учащимися степени достоверности полученных результатов на основе анализа способа их получения.

Главные методические трудности заключаются в том, что дедуктивная система, основанная на глубоких абстракциях, логическое строение математики находятся в противоречии с конкретным опытом учащихся, особенно на первых порах обучения математике, т.е. именно тогда, когда закладываются основы её усвоения. Важно, чтобы учащиеся имели возможность постепенно от класса к классу все более глубоко постигать «устройство» математики как логической системы и понятие математического доказательства как способа рассуждений, гарантирующего получения верных выводов из верных посылок в рамках определённой математической теории.

Сказанное определяет актуальность темы.

Материалы и методы

В основу любой математической теории положены основные (исходные) понятия, ни объем, ни содержание которых не устанавливаются с помощью обычных приёмов определения. Кроме того, построение научной теории предполагает выделение конечной системы аксиом, в которых описано основное содержание исходных понятий, а также отношения между исходными понятиями и которые принимаются без доказательства. Кроме аксиом, все остальные предложения теории выводятся логическим путём с использованием законов логики, правил вывода. В известной книге «Математика в образах» [7] предлагается представить математику в виде огромного строящегося здания. Когда каменщик возводит стену, то каждый кирпич прочно укладывается на уложенный ранее и скрепляется с ним раствором. Точно так же в рассуждении математика каждое утверждение опирается на уже доказанные. Оно сцементировано с ними законами логики. Любая теорема или несколько теорем, в свою очередь, могут послужить обоснованием для какой-то новой теоремы. И подобно тому, как здание складывается из кирпичей, любая математическая теория представляет собой совокупность теорем.

Большинство утверждений школьного курса математики общеутвердительные, сформулированные в импликативной форме ($\forall x \in M$)($A(x) \rightarrow B(x)$) или допускающие переформулировку в импликативной форме.

С понятием «утверждение» (теорема) непосредственно связано понятие «доказательство» (обоснование). Зададимся вопросом: что такое доказательство в математике и в обучении математике?

Доказательство в широком смысле – это установление истинности суждения при помощи логических рассуждений и эмпирических данных. Вопрос статуса эмпирических данных в доказательстве математических утверждений обсудим ниже. Термин «рассуждение» означает метод получения новых знаний, представляющий собой мысленное моделирование, логический вывод или заключения из имеющихся данных. Цель любого доказательства – обоснование утверждения, тезиса. Доводами или аргументами доказательства являются истинные в рамках данной теории утверждения. Условно будем считать такое понимание доказательства содержательным.

В математической логике под доказательством некоторого утверждения Т понимают такую конечную последовательность предложений ($\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1$, ..., $\mathfrak{A}_n$) данной теории, что каждое предложение этой последовательности либо аксиома, либо определение, либо допущение (условие доказываемой теоремы), либо ранее уже доказанная теорема, либо получено из предшествующих предложений этой последовательности по одному из правил вывода. Последнее предложение этой последовательности $\mathfrak{A}_n$ и есть предложение Т. Основные правила вывода: правило заключения, правило силлогизма, правило отрицания. В математической логике речь идёт о так называемом формальном доказательстве.

Одна из особенностей формально-логического доказательства, так называемая демонстрация доказательства – явное указание и использование допустимых правил вывода.

Обратим внимание ещё на один факт: в разных областях математики смысл понятия доказательства как рабочего инструмента получения новых знаний понимается по-разному. Г.В. Дорофеев говорит о том, что в математической науке понятие доказательство относится не к собственно математике, а к так называемой метаматематике. Приставка «мета» означает, в том числе, более высокий уровень обобщения. Статус метаматематика имею разделы математики, которые обычно относят к её основаниям, в частности, математическая логика. В.А. Успенский также обращает внимание на то, что понятие доказательство не вполне математическое понятие. По отношению к математике оно не внутреннее, а внешнее [12].

В обычной классической математике, большинство разделов которой – содержательные (неформальные) и полуформальные теории, применяют содержательные доказательства. Здесь доказательствами считаются именно убедительные рассуждения, и лишь разделы математики, относящиеся к её основаниям, используют формально-логическое определение доказательства.

Г.В. Дорофеев, обсуждая вопросы языка математики и языка преподавания математики, обращает внимание на то, что для языка преподавания типичны термины деятельностного характера, среди которых предложение-требование «доказать теорему». Подобные предложения-требования в процессе преподавания считаются достаточно ясными для каждого, владеющего родным языком, не разъясняются учащимся, а уточняются лишь по мере необходимости в конкретных методических ситуациях [2].

Анализ статуса терминов «теорема», «доказательство» в математическом языке показывает, что и они являются в действительности терминами языка преподавания, если не иметь в виду разделы математики, связанные с математической логикой. Только в аксиоматических теориях содержится формальное определение доказательства как некоторой последовательности формул и определение теоремы как формулы, для которой существует доказательство. Статус соответствующих терминов в классической математике такой же, как и в её преподавании: теорема – есть утверждение, подлежащее доказательству. Что же касается самого понятия доказательства, центрального для всего обучения математике, то единственным и психологически очень точным разъяснением этого понятия является крылатая фраза: «Доказательство – это рассуждение, которое убеждает». Более точного определения доказательства дать невозможно, оставаясь в разумных методических рамках. Поэтому понятие «доказательство» в школьном обучении не определяется, а формируется в сознании учащихся постепенно при изучении математики [2, С. 85].

Школьный курс математики включает начальные фрагменты некоторых математических теорий в содержательном изложении, поэтому и доказательства в школьном курсе математики строятся как содержательные, доказательства, в которых используются обычные рассуждения, а правила логического вывода не фиксируются. Процедура доказательства опирается не только на объекты математики, в ней используются и понятия обычного естественного языка (а также понятия физики, механики и т.д.). К тому же, зачастую – либо делается ссылка на интуитивно ясные факты. Отказ от интуитивных моментов потребовал бы поднять уровень доказательства, что невозможно из-за возрастных особенностей школьников.

Итак, в школьном курсе и в обычной, классической, математике доказательствами считаются именно убедительные рассуждения, проведённые на принятом уровне строгости. Д. Пойа использует для такого рода рассуждений термин «правдоподобные рассуждения». Это такие рассуждения, каждый шаг которых «имеет целью сделать более правдоподобным некоторое предложение» [6].

Несмотря на большие различия между содержательными доказательствами школьной математики и формально-логическим доказательством, признаваемым основаниями науки, воспитательное, развивающее значение деятельности учащихся, связанной с обучением доказательству теорем, общепризнано.

Далее рассмотрим вопрос обучения доказательствам, а также роль и место дедуктивных и индуктивных рассуждений в математике и в обучении математике.

Под обучением доказательству будем понимать и обучение готовым доказательствам теорем (понимание, воспроизведение), и обучение самостоятельному доказательству (самостоятельный разбор готового доказательства, самостоятельный поиск доказательства), и формирование потребности в доказательстве, и формирование критического мышления (оценка верности утверждения, опровержение неверного утверждения приведением контрпримера, оценка верности доказательства).

Основу любого доказательства составляют рассуждения, которые подразделяются на индуктивные и дедуктивные. При обучении школьников математике возникают и индуктивные, и дедуктивные рассуждения.

Дедуктивные рассуждения представляют собой переход от общего утверждения к частному. Из верности общего утверждения всегда следует верность частного. В результате индуктивных рассуждений делается вывод о том, что все объекты рассматриваемого множества обладают некоторым свойством лишь на том основании, что этим свойством обладают некоторые объекты данного множества. Ясно, что индукция может привести как к верным, так и к неверным выводам.

Полная индукция, или метод перебора представляет собой метод рассуждений, при котором на основании того, что каждый объект некоторого множества обладает определенным свойством, делается вывод, что все объекты данного множества обладают указанным свойством.

Если множество объектов бесконечно, то перебор всех элементов невозможен. Однако и в этом случае полная индукция может быть реализована, если удаётся разбить бесконечное множество на конечное число подмножеств и доказать верность некоторого утверждения для каждого класса. Важно, чтобы эти классы в объединении составляли всё исходное множество, никакие два класса не имели общих элементов и каждый из рассматриваемых классов был не пустым множеством. Так доказываются некоторые свойства модуля действительного числа (модуль произведения и модуль частного). Классы, на которые предварительно разбивается множество действительных чисел: положительные, отрицательные и нуль.

В теории чисел известен так называемый метод перебора остатков, который тоже может быть отнесён к полной индукции. Так может быть доказано утверждение о делимости на 8 произведения двух последовательных четных чисел.

В отличие от полной индукции неполная индукция не гарантирует получение верного результата.

Однако в обучении математике, наряду с дедуктивными рассуждениями, существенная роль принадлежит наблюдению, опытам, неполной индукции. В настоящее время в математике и в обучении математике всё чаще используется термин «эксперимент». Экспериментирование в математике – нехарактерный вид деятельности в отличие от экспериментирования в естественных науках. Из методов математики эксперимент наиболее близок к неполной индукции, которая в ситуации неопределённости позволяет проверить утверждение для частных случаев с целью выдвинуть предположение о верности утверждения.

В процессе наблюдения и опыта устанавливается некоторое представление об исследуемом объекте, появляется возможность для индуктивных выводов-предположений. В 5–6 классах опытные методы установления фактов являются основными. На ранних этапах обучения именно наблюдения и опыт убеждают учащихся в справедливости факта в большей степени, чем установление его логическим путем. Значительное число выводов при изучении геометрического материала в 5–6 классах делается как обобщение измерений и построений, выполненных учащимися с помощью чертежных инструментов. Важная роль при обучении математике принадлежит так называемому субъектному опыту учащихся, их жизненному опыту.

Наблюдение и опыт не только содействуют открытию новых фактов, но и подсказывают путь их логических обоснований. Примером может служить известный опыт, устанавливающий, что сумма углов любого треугольника равна 180°.

Индуктивный метод может использоваться и в более старшем возрасте, хотя, по мере взросления и развития критического мышления учащихся границы применимости метода неполной индукции сужаются. Важно обсуждать с учащимися вопрос о том, что выводы, сделанные на основании определенного числа наблюдений, не исчерпывающих всех частных случаев, могут быть правдоподобными, но не всегда являются достоверными. История математики знает случаи, когда выводы, сделанные по индукции одними учеными, опровергались другими. Предположение Ферма о том, что числа вида $2^{2^n} + 1$ простые, было опровергнуто Л. Эйлером. Л. Эйлер нашел, что при $n = 5$ число $2^{2^5} + 1$ не является простым.

Результаты и обсуждение

Общепризнанным является тот факт, что более интенсивному развитию мышления способствует создание учебных ситуаций, направленных на самостоятельное «открытие» закономерностей. Ситуация «открытия», как правило, предполагает сбор и анализ эмпирических данных. Сбор эмпирического материала требует времени. Спешка часто является организационной причиной отказа от индуктивных рассуждений. При этом теряется возможность обнаружить и «удивиться» неочевидному математическому факту, теряется эмоционально-ценностная составляющая содержания обучения [10].

Запреты на индуктивную форму рассуждений негативно влияют на развитие математического творчества. В ситуации неопределенности, когда справедливость утверждения под вопросом, невозможно руководствоваться требованиями «Истинность утверждения с квантором общности доказывается в общем виде, а ложность – приведением контрпримера», «Для доказательства теоремы существования достаточно привести пример», «Нельзя доказать ложность утверждения с квантором существования приведением примера». Без проверки утверждения на правдоподобность, без рассмотрения его для частных случаев предположение о верности/ложности часто не имеет оснований. В то время как в результате индуктивного рассуждения может возникнуть пример, опровергающий утверждение с квантором общности (контрпример), либо «хороший» пример, подтверждающий истинность утверждения с квантором существования. В противном случае, когда собранные эмпирические данные не содержат особого примера, возникает предположение о верности общего утверждения или о ложности утверждения с квантором существования.

Вместо запрета на определенные формы рассуждений целесообразно из раза в раз на конкретных утверждениях убеждать учащихся в том, что если тот пример, который сейчас у нас в руках, не удовлетворяет условию P, то это вовсе не означает, что объекта из множества однотипных, который этому условию удовлетворяет, не существует. Или если встретившиеся нам примеры из бесконечного множества однотипных обладают свойством P, то это вовсе не означает, что все остальные, еще не проверенные, тоже будут этим свойством обладать. В последнем случае оппонент, как правило, соглашается с приведенными аргументами и пытается разбить бесконечное множество объектов на классы, чтобы представить обоснование верности утверждения для типичных представителей выделенных классов. Такое рассуждение имеет более высокую степень общности, а опыт соответствующей деятельности представляется полезным [11].

Кроме того, индуктивные рассуждения могут выявить возможную идею доказательства, задать трафарет рассуждений, по которому бывает возможным провести более строгое обоснование в общем виде. Для такого вида трафаретных рассуждений авторы учебного пособия [3] употребляют термин «модельный характер доказательства».

Остановимся подробнее на некоторых особенностях обучения доказательствам учащихся разного возраста. Какие методы поиска закономерности, выдвижения гипотезы, обоснования утверждений являются приоритетными для разных возрастных категорий учащихся?

Психологическим основанием возможности обучения доказательствам в школе являются возрастные особенности учащихся. Исследования П.П. Блонского и С.Л. Рубинштейна показали, что структуры мозга, отвечающие за аналитическую деятельность, формируются к 13–14 годам. При этом в подростковом возрасте ребёнок в большей степени готов к усвоению доказательств, чем к самостоятельному доказательству утверждений, потребность в доказательстве только начинает формироваться. В юношеском возрасте активно проявляется критическое отношение к готовым доказательствам [8].

В 5–6 классах обучение доказательствам направлено на формирование понимания учащимися необходимости обоснований, в том числе логических обоснований, понимания того, что из одних известных утверждений следуют новые утверждения. Приобретается первоначальный опыт простейших дедуктивных выводов. При этом математическая строгость большинства проводимых рассуждений минимальная. Для обоснования чаще всего используются индуктивные рассуждения, привлекается субъектный опыт учащихся в виде сюжетных задач. Напомним в связи с этим высказывание Анри Пуанкаре, французского математика 19 века, о том, что есть только два способа научить дробям – разрезать, хотя бы мысленно либо пирог, либо яблоко. При любом другом способе обучения (аксиоматическом или алгебраическом) школьники, складывая дроби, предпочитают складывать числители с числителями, а знаменатели – со знаменателями.

При обучении элементам геометрии в 5–6 классах используют вырезание фигур из бумаги, различные эксперименты с листом бумаги: сгибание, наложение и т.д. Однако постепенно по мере взросления и накопления опыта математической деятельности экспериментальные способы обоснования уступают место более строгим рассуждениям.

С 7 класса, когда начинаются систематические курсы геометрии и алгебры, предполагается обучение школьников составлению цепочек дедуктивных умозаключений, обучение действиям выведение следствий и обучение преобразованию заключения теоремы как основы для поиска способа доказательства, применение аналогии и обобщения.

В более старшем возрасте (7–8 класс) предполагается формировать умения анализировать доказательство: выделять логические шаги, выявлять и устранять логические пробелы, выделять идею доказательства и воспроизводить его. Всё это готовит учащихся к самостоятельному поиску и осуществлению доказательства.

В 8–9 классах заметно проявляется способность к критическому мышлению. Критическое отношение к изучаемому материалу требует организации адекватной деятельности. Участие в деятельности по выявлению закономерности, как правило, сопровождается возникновением нескольких гипотез. Это создаёт хорошую возможность организовать деятельность по оценке верности возникающих предположений, деятельность по опровержению или уточнению неверных гипотез.

В старших классах приобретённый учащимися опыт позволяет проводить более строгие доказательства. Обучение доказательству может включать самостоятельное открытие фактов, их обоснование с элементами самостоятельности, обсуждение рациональности способа аргументации, опровержение предложенных рассуждений, их корректировку.

Остановимся далее на приёмах, позволяющих сделать отдельные этапы изучения теорем в большей степени неформальными. Заметим, что за основу следующего блока взяты авторские идеи, вошедшие в учебное пособие [1].

Существуют различные способы знакомства с теоремой. Теорема может быть «открыта» учащимися в процессе экспериментирования с математическими объектами либо сформулирована по аналогии. После ознакомления с неочевидным утверждением можно, а в некоторых случаях желательно проверить его справедливость на частных случаях, на моделях. Желательно также обсудить и объяснить возможные ограничения в теореме, область допустимых значений переменных.

Этапы усвоения содержания теоремы и запоминания её формулировки реализуются в упражнениях на выявление условия и заключения теоремы, на распознавание ситуаций, удовлетворяющих/не удовлетворяющих теореме, на выполнение чертежей. Ошибки, возникающие при выделении логической структуры теоремы, обычно дают повод для разговора об обратных теоремах и их связи.

Запоминание формулировки теоремы иногда организуется с помощью так называемых мнемонических правил, совокупности приёмов и способов, облегчающих удержание в памяти теоремы путём образования ассоциаций. Практика преподавания показывает, что требуются целенаправленные методические усилия для демонстрации учащимся разницы между доказательством теоремы и мнемоническим правилом, позволяющим её запомнить.

Работа с доказательством теоремы также может быть осуществлена поразному. Среди приёмов прямого доказательства выделяют приём преобразования условия теоремы («движение вперед») и приём преобразования заключения теоремы («движением назад»). Для поиска идеи доказательства целесообразно использовать рассуждение «движение назад» от заключения к условию, подбирая достаточные условия, а для изложения уже известной идеи доказательства, для оформления доказательства используются рассуждения «движение вперёд», от условия к заключению, когда делаются выводы – следствия из условия.

В процессе работы над доказательством можно предлагать учащимся развернуть тот или иной переход, сформулировать то или иное вспомогательное утверждение, выделить общее и частное положения, явно указать правило вывода.

Этапы ознакомления со способом доказательства и доказательство теоремы реализуются в упражнениях на ознакомление с методом доказательства теоремы, в упражнениях, моделирующих способ доказательства (модельное доказательство), в упражнениях на выявление в доказательстве неочевидных вспомогательных утверждений и их обосновании.

Этап применения теоремы реализуется в упражнениях с нарастанием степени трудности. Здесь приобретает значение два аспекта: применение теоремы в стандартных ситуациях (прямое применение, ключевые задачи) и умение свести нестандартную ситуацию применения теоремы к стандартной. В геометрии на этапе применения теоремы следует развивать видение ситуаций, удовлетворяющих теореме, постепенно предлагая задачи, требующие всё больше усилий для вычленения на чертеже конфигурации, которая удовлетворяла бы условию теоремы.

Характер математического содержания не является нейтральной характеристикой при изучении утверждений в школе, при выборе способа рассуждений для их обоснования. Так, при изучении теории многочленов целесообразно рассмотрение модельного доказательства утверждения перед его обоснованием в общем виде. В теме «многочлены» это, как правило, позволяет избежать громоздких обозначений и выкладок при первоначальном знакомстве с утверждением и структурой его доказательства, существенно облегчает восприятие учащимися последующих общих рассуждений для произвольного многочлена.

При рассмотрении в старших классах приложений производной к исследованию функции на монотонность и экстремумы строгие доказательства заменяются правдоподобными рассуждениями, основанными на физическом и геометрическом смыслах производной, с активным привлечением графических иллюстраций, на основе которых учащиеся с высокой степенью самостоятельности могут обнаружить и сформулировать большинство утверждений. Главное, чтобы изложение фактологически не противоречило математике как науке и было доступно школьникам. Это вполне приемлемо, но лишь при условии, что правдоподобные рассуждения не выдаются за доказательства [4].

Результаты

Таким образом, как в любой содержательной математической теории, не относящейся к основаниям математики, под «доказательством» в обучении математике понимают рассуждение, которое убеждает. Строгость доказательств с возрастом, с приобретением опыта математической деятельности, с расширением математического кругозора увеличивается. От индуктивных доказательств и доказательств на сюжетных задачах, привлекающих в качестве аргументации субъектный опыт учащегося, постепенно переходят к доказательствам, с опорой исключительно на аксиомы и ранее доказанные теоремы, получая представление об архитектуре математики. При этом индуктивные рассуждения и экспериментирование не должны иметь статус запретных и в старших классах, однако только при условии регулярного обсуждения требований к методам рассуждения в дедуктивных науках.

Рассмотренные вопросы позволяют яснее понять, насколько «школьные доказательства» далеки от «строгих» доказательств; насколько вредны традиционно создаваемые иллюзии строгости там, где в действительности есть пёстрая смесь интуиции и логики [9].

Заключение

Основными результатами обучения математике наряду с предметными знаниями надо считать развитие логического и математического мышления, овладение математическими рассуждениями, развитие математической интуиции.

При изучении теорем могут быть организованы виды деятельности, моделирующие деятельность учёного-математика. Наряду с традиционными видами деятельности важно создать условия для выявления закономерности, формулирования предположения, проверки верности предположения, поиска границ или условий его выполнимости, возможно, на основе рассмотрения частных случаев. Кроме того, важно в обсуждении оценить достоверность полученных выводов на основе анализа степени общности рассуждений. Приобретая опыт такой деятельности, школьник учится не только умению доказывать математические утверждения. Возникают предпосылки для формирования критического мышления, потребности в обосновании, что имеет общеобразовательное значение и может быть отнесено к метапредметным результатам обучения.

Список использованной литературы

1. Дидактические основы математики в общем образовании: учебное пособие / Э.К. Брейтигам, И.В. Кисельников, И.Г. Кулешова, О.А. Тыщенко. – Барнаул: АлтГПУ, 2020. – 208 с.

2. **Дорофеев, Г.В.** Математика для каждого. – Предисловие Кудрявцева Л.Д. – М.: Аякс, 1999. – 292 с.

3. **Дорофеев, Г.В., Пчелинцев, С.В.** Многочлены с одной переменной: книга для учащихся / Г.В. Дорофеев, С.В. Пчелинцев. – М.: Просвещение, 2001. – 143 с.

4. **Мордкович, А.Г.** Беседы с учителями математики: учебно-методическое пособие / А.Г. Мордкович. – 2-е изд., доп. и перераб. – Москва: Оникс 21 век: Мир и Образование, 2005. – 335 с.

5. Методика обучения математике: учебник для академического бакалавриата. В 2 частях. Часть 1 / под ред. Н.С. Подходовой, В.И. Снегуровой. – Москва: Юрайт, 2017. – 274 с.

6. **Пойа, Дж.** Математика и правдоподобные рассуждения / Дж. Пойа; пер. с англ. И.А. Вайнштейна; под ред. С.А. Яновской. – Изд. 2-е, испр. – Москва: Наука, 1975. – 463 с.

7. **Пухначев, Ю.П.** Математика в образах / Ю.П. Попов, Ю.В. Пухначев. – Москва: Знание, 1989. – 207 с.

8. **Саранцев, Г.И.** Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студ. мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

9. **Столяр, А.А.** Педагогика математики: учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов / А.А. Столяр. – Изд. 3-е, испр. и доп. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – 414 с.

10. Теоретические основы содержания общего среднего образования / Академия педагогических наук СССР, Научно-исследовательский институт общей педагогики; под ред. В.В. Краевского, И.Я. Лернера. – Москва: Педагогика, 1983. – 352 с.

11. **Тыщенко, О.А.** Индуктивные рассуждения в обучении математике / О.А. Тыщенко // Сборник научных работ, представленных на Международную конференцию «72 Герценовские чтения». – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена, 2020. – с.33-34.

12. **Успенский, В.А.** Простейшие примеры математических доказательств: учебное пособие / В.А. Успенский. – Москва: МЦНМО, 2012. – 56 с.

References

1. Didakticheskie osnovy matematiki v obshchem obrazovanii: uchebnoe posobie / E.K. Brejtigam, I.V. Kisel'nikov, I.G. Kuleshova, O.A. Tyshchenko. – Barnaul: AltGPU, 2020. – 208 s.

2. **Dorofeev, G.V.** Matematika dlya kazhdogo. – Predislovie Kudryavceva L.D. – M.: Ayaks, 1999. – 292 s.

3. **Dorofeev, G.V., Pchelincev, S.V.** Mnogochleny s odnoj peremennoj: kniga dlya uchashchihsya / G.V. Dorofeev, S.V. Pchelincev. – M.: Prosveshchenie, 2001. – 143 s.

4. **Mordkovich, A.G.** Besedy s uchitelyami matematiki: uchebno-metodicheskoe posobie / A.G. Mordkovich. – 2-e izd., dop. i pererab. – Moskva: Oniks 21 vek: Mir i Obrazovanie, 2005. – 335 s.

5. Metodika obucheniya matematike : uchebnik dlya akademicheskogo bakalavriata. V 2 chastyah. CHast' 1 / pod red. N.S. Podhodovoj, V.I. Snegurovoj. – Moskva: YUrajt, 2017. – 274 s.

6. **Poja, Dzh.** Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya / Dzh. Poja; per. s angl. I. A. Vajnshtejna; pod red. S.A. YAnovskoj. – Izd. 2-e, ispr. – Moskva: Nauka, 1975. – 463 s.

7. **Puhnachev, YU.P.** Matematika v obrazah / YU.P. Popov, YU.V. Puhnachev. – Moskva: Znanie, 1989. – 207 s.

8. **Sarancev, G.I.** Metodika obucheniya matematike v srednej shkole: Ucheb. posobie dlya stud. mat. spec. ped. vuzov i un-tov/ G.I. Sarancev. – M.: Prosveshchenie, 2002. – 224 s.

9. **Stolyar, A.A.** Pedagogika matematiki: uchebnoe posobie dlya studentov fiziko-matematicheskih fakul'tetov pedagogicheskih institutov / A.A. Stolyar. – Izd. 3-e, ispr. i dop. – Minsk: Vyshejshaya shkola, 1986. – 414 s.

10. Teoreticheskie osnovy soderzhaniya obshchego srednego obrazovaniya / Akademiya pedagogicheskih nauk SSSR, Nauchno-issledovatel'skij institut obshchej pedagogiki; pod red. V.V. Kraevskogo, I.YA. Lernera. – Moskva: Pedagogika, 1983. – 352 s.

11. **Tyshchenko, O.A.** Induktivnye rassuzhdeniya v obuchenii matematike / O.A. Tyshchenko // Sbornik nauchnyh rabot, predstavlennyh na Mezhdunarodnuyu konferenciyu «72 Gercenovskie chteniya». – SPb.: Izd-vo RGPU im. A.I.Gercena, 2020. – s.33-34.

12. **Uspenskij, V. A**. Prostejshie primery matematicheskih dokazatel'stv : uchebnoe posobie / V.A. Uspenskij. – Moskva: MCNMO, 2012. – 56 s.

*О.А. Тыщенко [1]
[1] Алтай мемлекеттік педагогикалық университеті, Ресей

Оқушылардың математикалық тұжырымдарды және олларды дәлелдеу тәсілдерін зерделеу кезіндегі қызметі

Анотация. Мақалада математиканың түрлі бөлімдеріндегі және математиканы оқыту тіліндегі «дәлел» ұғымының мазмұнының ерекшеліктері талқыланады. Математиканы оқытуда және оның негіздеріне жатпайтын математиканың бөлімдерінде қабылданған қатаңдық деңгейінде жүргізілген сенімді пікірлер «дәлел» болып есептеледі. Математикаға тән емес, бірақ математиканы оқыту кезінде таралған, эксперимент, модельдік дәлел сияқты тұжырымдарды негіздеу және тексеру тәсілдері қарастырылды. Осы пайымдау тәсілдерінің рөлі мен орны талқыланады. «Математикалық эксперимент» ұғымы нақтыланады, оның толық емес индукция ұғымымен байланысы, сондай-ақ математикада және математиканы оқытуда индуктивті пайымдаулардың рөлі мен орны талқыланады. Мақсат қойылады – тұжырымдарды зерделеу кезінде мектеп оқушылары қызметінің әртүрлі түрлерінің әдістемелік орындылығын, соның ішінде математиканың дедуктивтік теория ретінде құрылуына тән емес қызмет түрлерін көрсету. Бұдан басқа, жалпыға бірдей математикалық ұсыныстарды зерделеу кезінде пайымдауларды жалпы түрде қолданбау шарттары қарастырылады.

Мәселе. Оқушылардың математикалық мазмұндағы тәжірибелік қызметін, жас ерекшеліктеріне сәйкес келетін, бағалы тұлғалық қасиеттердің дамуына ықпал ететін қызметті жоққа шығармай, оқушылардың математика туралы баламалы түсінігін мектепте оқудың соңына қарай қалай қалыптастыруға болады.

Кілті сөздер: математикадағы бекіту, теорема, «дәлел»; математиканы оқытудағы «дәлел»; индуктивті пайымдаулар; математикадағы эксперимент; модельдік дәлел.

*O.A. Tyshchenko [1]
[1] Altai State Pedagogical University, Russia

The activities of schoolchildren in the study of mathematical statements and methods of their proof

Annotation. The article discusses the features of the content of the concept of «proof» in various sections of mathematics and in the language of teaching mathematics. It is concluded that convincing arguments conducted at the accepted level of rigor are considered «proof» in teaching mathematics and in sections of mathematics that are not related to its foundations. The methods of substantiation and verification of statements, atypical for mathematics, but common in teaching mathematics, such as experiment, model proof, are considered. The role and place of these ways of reasoning are discussed. The concept of «mathematical experiment» is clarified, its connection with the concept of incomplete induction is discussed, as well as the role and place of inductive reasoning in mathematics and in teaching mathematics. The aim is to show the methodological expediency of various types of activities of schoolchildren in the study of statements, including activities that are not typical for the construction of mathematics as a deductive theory. In addition, the conditions for the applicability of reasoning not in a general form in the study of universal mathematical propositions are considered.

Keywords: statement, theorem, «proof» in mathematics; «proof» in teaching mathematics; inductive reasoning; an experiment in mathematics; model proof.